完全可解ゲームの一つのクラス

川中 宣明

P は集合とし, φ は P から $2^P(= P$ の部分集合の集合) への写像とする. このような対 (P, φ) を**ゲーム**と呼び, $p, q \in P$ が $q \in \varphi(p)$ をみたすとき $p \to q$ とかく. 要するに, この講演でゲームと呼ぶのは, 集合の元の間の矢印システムに過ぎない. ゲーム (P, φ) が**有限**であるとは, 任意の $i \geq 0$ に対し $p_i \to p_{i+1}$ であるような P の元の無限列 $p_0, p_1, p_2, \ldots$ が存在しないことである. 有限ゲームは 2 人のプレイヤーが対戦する (詳しくいうと impartial [1] な) ゲームのモデルと思うことができる. 詳しく言うと : $p_o \in P$ を固定し, ゲーム開始の局面と考える. 先手は初手 $p_1 \in \varphi(p_0)$ を, 後手はその次の手 $p_2 \in \varphi(p_1)$ を選ぶ. さらに先手は $p_3 \in \varphi(p_2)$ を選ぶ. ... (P, φ) は有限ゲームであるから, ある整数 l に対し $\varphi(p_l) = \emptyset$ となる. l が奇数（偶数）のとき先手（後手）が**勝者**である. つまり, ゲームを続けられなくなった人が**敗者**である.
$p_0 \in P$ を固定すると, ツェルメロの定理により 2 人のプレイヤーのうちのどちらかは必勝戦略をもつ. しかし, 次の 2 つの現実的問いに答えるのは一般には容易でない.
(1) 必勝戦略をもつのは, 先手と後手のどちらか？ (2) 良い手の見つけ方は?
プレイヤーの選択肢が無限通りになる「超限的」な場合には, これらの問いに答えるのはとくに難しくなる. 講演者はこれら 2 つの問いに小さいサイズの計算で答えられるような「完全可解ゲーム」を構成することに興味を持った. この講演の主結果は:

有限な平明ゲームは完全可解である.

平明ゲームは公理的に定義され, ニムや佐藤・Welter ゲーム（[1] の Welter's game）とそれらの超限版は有限な平明ゲームの例である. 上で述べた勝者と敗者の定義を逆転（つまり [1] の用語で misère rule を採用）しても主結果は正しい. 本講演は Proctor の論文 [3] と関係が深い. この講演に関連する少し古い諸結果は [2] にある.

References

[1] J. H. Conway, *On Numbers and Games*, Second Edition, A K Peters, 2001.

[2] N. Kawanaka, *Games and algorithms with hook structure*, Sugaku Expositions **28**, 73–93 (2015). (日本語版のミスプリが上の英語版では修正してある. 論文末尾の Notes 参照.)
`https://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kawanaka/Sugaku(HookStructure).pdf`
日本語版 :「フック構造をもつゲームとアルゴリズム」, 数学 **63**-4, 421–441 (2011).
`https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku/63/4/63_0634421/_pdf/-char/ja`

[3] R. A. Proctor, *Dynkin diagram classification of λ-miniscule Bruhat lattices and of d-complete posets*, J.Algebraic Combin., **9**, 61–94 (1999).

Date: Feb. 18-19, 2019.